Tutorium Woche 7

Dominik Bruhn, Tutorium Nr. 9 + 11

09.12.2009

Agenda

Übungsblatt

-
-
-
-

Weihnachten

- Nächste Woche gibt es Montag ein normales Übungsblatt
- Nächste Woche ist am Mittwoch (16. Dezember) normal Tutorium

Weihnachten

- Nächste Woche gibt es Montag ein normales Übungsblatt
- Nächste Woche ist am Mittwoch (16. Dezember) normal Tutorium
- **Übernächste Woche** gibt es Montag ein "Weihnachtsübungsblatt"
- **Übernächste Woche** findet am (23. Dezember) **kein** Tutorium statt.

Weihnachten

- Nächste Woche gibt es Montag ein normales Übungsblatt
- Nächste Woche ist am Mittwoch (16. Dezember) normal Tutorium
- **Übernächste Woche** gibt es Montag ein "Weihnachtsübungsblatt"
- **Übernächste Woche** findet am (23. Dezember) **kein** Tutorium statt.
- Erstes Tutorium im neuen Jahr: 12. Januar

Motivation

Beispiel

Zwei Zeichenketten, jeweils 58 Zeichen lang:

`abababababababababababababababababababababababababababababab`

`w1gjmjkkujvb9qnwuiybj4akfienby98b60aeztrb3h1ccvvprmauad2ve`

Welche Länge hat die kleinste Turingmaschine, die diese Zeichenketten erzeugt?

Definition

Definition (Kolmogorow-Komplexität)

Gegeben eine Zeichenkette x.
Sei $\mathcal{M}$, die einfachste Turingmaschine, die x auf das Band ausgibt.
Dann ist die Kolmogorow Komplexität $K(x) = |M|$.

Aufgabe 1

Aufgabe 1.1

Gib eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorow-Komplexität von 0^n an!

Aufgabe 1

Aufgabe 1.1

Gib eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorow-Komplexität von 0^n an!

Aufgabe 1.2

Gib eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorow-Komplexität der Binärdarstellung der n-ten Primzahl p an!

Aufgabe 1

Aufgabe 1.1

Gib eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorow-Komplexität von 0^n an!

Aufgabe 1.2

Gib eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorow-Komplexität der Binärdarstellung der n-ten Primzahl p an!

Aufgabe 1.3

Sei x ein Palindrom. Gib eine möglichst gute obere Schranke für $K(x)$ an!

Aufgabe 1

Aufgabe 1.4

Sei π_n die Kreiszahl π bis zur n-ten Nachkommastelle entwickelt. Gib eine möglichst gute obere Schranke für π_n an.

Aufgabe 2

Aufgabe 2.1

Beweise, dass $K(x)$ nicht berechenbar ist!

Aufgabe 2

Aufgabe 2.1

Beweise, dass $K(x)$ nicht berechenbar ist!

Lösung

Annahme: $K(x)$ ist berechenbar:

Aufgabe 2

Aufgabe 2.1

Beweise, dass $K(x)$ nicht berechenbar ist!

Lösung

Annahme: $K(x)$ ist berechenbar:
Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}$:

Aufgabe 2

Aufgabe 2.1

Beweise, dass $K(x)$ nicht berechenbar ist!

Lösung

Annahme: $K(x)$ ist berechenbar:
Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}$:

1. Hole eigene Darstellung $\langle \mathcal{M} \rangle$.

Aufgabe 2

Aufgabe 2.1

Beweise, dass $K(x)$ nicht berechenbar ist!

Lösung

Annahme: $K(x)$ ist berechenbar:
Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}$:

1. Hole eigene Darstellung $\langle \mathcal{M} \rangle$.
2. Für alle Strings $x \in \{0,1\}^* x \in \{0,1\}^*$:
   1. Berechne $K(x)$
   2. Falls $K(x) > |\langle \mathcal{M} \rangle|$ breche Schleife ab.

Aufgabe 2

Aufgabe 2.1

Beweise, dass $K(x)$ nicht berechenbar ist!

Lösung

Annahme: $K(x)$ ist berechenbar:
Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}$:

1. Hole eigene Darstellung $\langle \mathcal{M} \rangle$.
2. Für alle Strings $x \in \{0,1\}^* x \in \{0,1\}^*$:
   1. Berechne $K(x)$
   2. Falls $K(x) > |\langle \mathcal{M} \rangle|$ breche Schleife ab.
3. Schreibe x auf das Band.

Aufgabe 2

Aufgabe 2.2

Beweise, dass die Menge der nichtkomprimierbaren Strings $\mathcal{L}$ nicht rekursiv aufzählbar ist!

Aufgabe 2

Aufgabe 2.2

Beweise, dass die Menge der nichtkomprimierbaren Strings $\mathcal{L}$ nicht rekursiv aufzählbar ist!

Lösung

Annahme: $\mathcal{L}$ ist rekursiv aufzählbar:

Aufgabe 2

Aufgabe 2.2

Beweise, dass die Menge der nichtkomprimierbaren Strings $\mathcal{L}$ nicht rekursiv aufzählbar ist!

Lösung

Annahme: $\mathcal{L}$ ist rekursiv aufzählbar:
Es gibt eine Möglichkeit, die Elemente von $\mathcal{L}$ aufzuzuzählen.
Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}$:

Aufgabe 2

Aufgabe 2.2

Beweise, dass die Menge der nichtkomprimierbaren Strings $\mathcal{L}$ nicht rekursiv aufzählbar ist!

Lösung

Annahme: $\mathcal{L}$ ist rekursiv aufzählbar:
Es gibt eine Möglichkeit, die Elemente von $\mathcal{L}$ aufzuzuzählen.
Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}$:

1. Hole eigene Darstellung $\langle\mathcal{M}\rangle$.

Aufgabe 2

Aufgabe 2.2

Beweise, dass die Menge der nichtkomprimierbaren Strings $\mathcal{L}$ nicht rekursiv aufzählbar ist!

Lösung

Annahme: $\mathcal{L}$ ist rekursiv aufzählbar:
Es gibt eine Möglichkeit, die Elemente von $\mathcal{L}$ aufzuzuzählen.
Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}$:

1. Hole eigene Darstellung $\langle \mathcal{M} \rangle$.
2. Für alle Strings x in $\mathcal{L}$:
   1. Falls $|x| > |\langle \mathcal{M} \rangle|$, bereche Schleife ab.
3. Schreibe x auf das Band.

Definition

Prädikaten-Logik selbst definiert nur die Symbole:

- $\forall$
- $\exists$
- $\wedge$ und $\vee$

Alle weiteren Symbole, unter anderem auch die Gleichheit bzw. das Gleichheitszeichen müssen in der sogenannten *Theorie* definiert werden.

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: $Th(\mathbb{N}, +)$: Definiert:

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: Th($\mathbb{N}, +$): Definiert:

- Alle Variablen (a,x usw.) sind $\in \mathbb{N}$

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: $Th(\mathbb{N}, +)$: Definiert:

- Alle Variablen (a,x usw.) sind $\in \mathbb{N}$
- Bedeutung der Zahlen (1,5,100)

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: Th($\mathbb{N}, +$): Definiert:

- Alle Variablen (a,x usw.) sind $\in \mathbb{N}$
- Bedeutung der Zahlen (1,5,100)
- Zweistellige Relation $=$ definiert wie in der Mathematik

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: $Th(\mathbb{N}, +)$: Definiert:

- Alle Variablen (a,x usw.) sind $\in \mathbb{N}$
- Bedeutung der Zahlen (1,5,100)
- Zweistellige Relation $=$ definiert wie in der Mathematik
- Zweistellige Relation $+$ definiert wie in der Mathematik

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$: Definiert:

- Alle Variablen (a,x usw.) sind $\in \mathbb{N}$
- Bedeutung der Zahlen (1,5,100)
- Zweistellige Relation $=$ definiert wie in der Mathematik
- Zweistellige Relation $+$ definiert wie in der Mathematik

Beispiel (Aussage)

Aussage:

$\phi_0 = \forall x \exists y : x + y = 5$

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$: Definiert:

- Alle Variablen (a,x usw.) sind $\in \mathbb{N}$
- Bedeutung der Zahlen (1,5,100)
- Zweistellige Relation $=$ definiert wie in der Mathematik
- Zweistellige Relation $+$ definiert wie in der Mathematik

Beispiel (Aussage)

Aussage:
$\phi_0 = \forall x \exists y : x + y = 5$
Frage: Liegt ϕ_0 in der Theorie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?

Definition - Beispiel

Beispiel (Theorie)

Theorie: $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$: Definiert:

- Alle Variablen (a,x usw.) sind $\in \mathbb{N}$
- Bedeutung der Zahlen (1,5,100)
- Zweistellige Relation $=$ definiert wie in der Mathematik
- Zweistellige Relation $+$ definiert wie in der Mathematik

Beispiel (Aussage)

Aussage:
$\phi_0 = \forall x \exists y : x + y = 5$
Frage: Liegt ϕ_0 in der Theorie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?
Nein: Gegenbeispiel: $x = 5$, es existiert kein y.

Aufgabe 1

Gib für folgendende Formeln an ob diese in den besagten Theorien liegen:

Aufgabe 1.1

Ist $\phi_1 = \forall x \exists y \forall z : x + y = z$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?

Aufgabe 1

Gib für folgendende Formeln an ob diese in den besagten Theorien liegen:

Aufgabe 1.1

Ist $\phi_1 = \forall x \exists y \forall z : x + y = z$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?

Aufgabe 1.2

Ist $\phi_2 = \forall x \exists y \forall z \exists w : (x + z = w) \wedge (x + y = w)$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?

Aufgabe 1

Gib für folgendende Formeln an ob diese in den besagten Theorien liegen:

Aufgabe 1.1

Ist $\phi_1 = \forall x \exists y \forall z : x + y = z$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?

Aufgabe 1.2

Ist $\phi_2 = \forall x \exists y \forall z \exists w : (x + z = w) \wedge (x + y = w)$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?

Aufgabe 1.3

Ist
$\phi_3 = \forall x \forall y \forall z \forall w \forall v \exists s : \neg(x + w = y) \vee \neg(y + v = z) \vee (x + s = z)$
in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?

Aufgabe 2

Aufgabe 2

Sei $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ die Theorie der natürlichen Zahlen mit der Relation „echt kleiner“. Zeige: $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ ist entscheidbar.

Aufgabe 2

Aufgabe 2

Sei $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ die Theorie der natürlichen Zahlen mit der Relation „echt kleiner“. Zeige: $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ ist entscheidbar.

Bekannt

$\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$ ist entscheidbar.

Aufgabe 3

Gib Modelle für die folgenden prädikatenlogischen Formeln an! Gib dazu jeweils ein Universum $\mathcal{U}$
und eine Interpretation der Relationszeichen R_i an!

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \phi_1 = \quad & \forall\, x\, (R_1(x,x)) && [\mathrm{K1.1}] \\ & \wedge \forall\, x,y\, (R_1(x,y) \leftrightarrow R_1(y,x)) && [\mathrm{K1.2}] \\ & \wedge \forall\, x,y,z\, ((R_1(x,y) \wedge R_1(y,z)) \rightarrow R_1(x,z)) && [\mathrm{K1.3}] \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gib Modelle für die folgenden prädikatenlogischen Formeln an! Gib dazu jeweils ein Universum $\mathcal{U}$
und eine Interpretation der Relationszeichen R_i an!

Aufgabe 3.1

$$
\begin{aligned}
\phi_1 = \quad & \forall\, x\, (R_1(x,x)) && [\text{K1.1}] \\
& \wedge \forall\, x, y\, (R_1(x,y) \leftrightarrow R_1(y,x)) && [\text{K1.2}] \\
& \wedge \forall\, x, y, z\, ((R_1(x,y) \wedge R_1(y,z)) \rightarrow R_1(x,z)) && [\text{K1.3}]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2

$$
\begin{aligned}
\phi_2 = \quad & \phi_1 \\
& \wedge \forall\, x\, (R_1(x,x) \rightarrow \neg R_2(x,x)) && [\text{K2.1}] \\
& \wedge \forall\, x, y\, (\neg R_1(x,y) \rightarrow (R_2(x,y) \oplus R_2(y,x))) && [\text{K2.2}] \\
& \wedge \forall\, x, y, z\, ((R_2(x,y) \wedge R_2(y,z)) \rightarrow R_2(x,z)) && [\text{K2.3}] \\
& \wedge \forall\, x\, \exists\, y\, (R_2(x,y)) && [\text{K2.4}]
\end{aligned}
$$

Ende

Fragen?

"Obvious" is the most dangerous word in science.